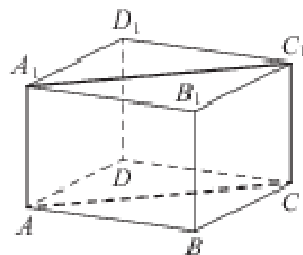


Билет №1

1. Аксиомы стереометрии. Некоторые следствия из аксиом (формулировка, чертёж).

2. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро AA_1 равно 9, а диагональ BD_1 равна 41. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A , A_1 и C .



3. В пирамиде $DABC$ прямые, содержащие ребра DC и AB , перпендикулярны.

- Постройте сечение плоскостью, проходящей через точку E — середину ребра DB , и параллельно DC и AB . Докажите, что получившееся сечение является прямоугольником.
- Найдите угол между диагоналями этого прямоугольника, если $DC = 24$, $AB = 10$.

Билет №2

1. Параллельные прямые в пространстве: определение параллельных прямых в пространстве; теорема. Параллельность трёх прямых в пространстве (теорема).

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро $CD = 6$, ребро $BC = 2\sqrt{10}$, ребро $CC_1 = 4$. Точка K — середина ребра DD_1 . Найдите площадь сечения, проходящего через точки C_1 , B_1 и K .

3. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $BC = 5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 5$, $SB = 13$, $SD = 10$.

- Докажите, что SA — высота пирамиды.
- Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

Билет №3

1. Параллельность прямой и плоскости в пространстве: определение параллельных прямой и плоскости; теорема (признак параллельности прямой и плоскости). Свойства (утверждения) параллельных прямой и плоскости.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер $AB = 28$, $AD = 9$, $AA_1 = 12$. Найдите синус угла между прямыми DD_1 и B_1C .

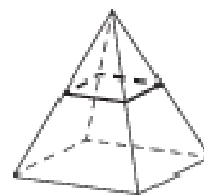
3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $4\sqrt{3}$. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C .
- Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Билет №4

1. Скрещивающиеся прямые: определение скрещивающихся прямых; теорема (признак скрещивающихся прямых).

2. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 160. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.



3. На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1 Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .

- Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
- Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ .

Билет №5

1. Взаимное расположение прямых в пространстве (три случая с чертежами). Теорема о скрещивающихся прямых.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $BB_1 = 16$, $CD = 8$, $BC = 11$. Найдите длину диагонали DB_1 .

3. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{11}$, $SB = 3\sqrt{3}$, $SD = 2\sqrt{5}$.

- Докажите, что SA — высота пирамиды.
- Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB .

Билет №6

1. Углы с сонаправленными сторонами (определение). Теорема об углах с сонаправленными сторонами.

2. Площадь поверхности правильной треугольной призмы равна 16. Какой станет площадь поверхности призмы, если все её рёбра увеличатся в восемь раз, а форма останется прежней?

3. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$, все ребра которой равны 4, точка K — середина бокового ребра AP .

- Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной прямым PB и BC .
- Найдите площадь сечения.

Билет №7

1. Параллельность плоскостей: определение параллельных плоскостей; теорема (признак параллельности двух плоскостей). Свойства параллельных плоскостей.

2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 38. Найдите тангенс угла

3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости ACB_1 .

б) Найдите угол между плоскостями $AD_1 C_1$ и $A_1 D_1 C$.

Билет №8

1. Лемма о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой. Определение прямой, перпендикулярной к плоскости. Теоремы о параллельных прямых, перпендикулярных к плоскости (прямая и обратная).

2. Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой равны 80 и высота равна 9.

3. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 5 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 5 : 11$, а точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$.

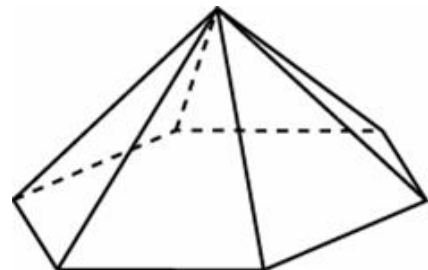
а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

Билет №9

1. Перпендикулярность прямой и плоскости: определение прямой, перпендикулярной к плоскости; теорема (признак перпендикулярности прямой и плоскости).

2. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 54, боковые рёбра равны 123. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



3. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$, все рёбра которой равны 6. Через точки A , C_1 и середину T ребра $A_1 B_1$ проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

Билет №10

1. Перпендикуляр и наклонные (чертёж, понятия). Теорема о трёх перпендикулярах (прямая и обратная). Определение угла между прямой и плоскостью.

2. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 84 и 21. Диагональ параллелепипеда равна 91. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

3. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами

$AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD .

Билет №11

1. Двугранный угол (определение). Линейный угол двугранного угла (чертёж, правила построения). Перпендикулярные плоскости (определение). Теорема (признак перпендикулярности двух плоскостей).
2. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 7 и 24. Площадь ее поверхности равна 1008. Найдите высоту призмы.
3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q — середины рёбер $A_1 B_1$ и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро $B_1 C_1$ в точке U .
 - а) Докажите, что $B_1 U : UC_1 = 2 : 1$.
 - б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью APQ .

Билет №12

1. Прямоугольный параллелепипед (определение). Свойства прямоугольного параллелепипеда. Теорема о диагонали прямоугольного параллелепипеда. Следствие из теоремы.
2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S вершина, $SO = 48$, $BD = 72$. Найдите боковое ребро SB .
3. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка N — середина ребра $A_1 C_1$.
 - а) Постройте сечение призмы плоскостью BAN .
 - б) Найдите периметр этого сечения.

Билет №13

1. Призма. Прямая призма. Правильная призма. Площадь боковой и полной поверхности призмы. Теорема о площади боковой поверхности прямой призмы.
2. На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите тангенс угла $B_1 D_1 C_1$.



3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC , точка O центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении $3:1$, считая от вершины пирамиды.
 - а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS .
 - б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP .

Билет №14

1. Пирамида. Правильная пирамида. Площадь боковой и полной поверхности пирамиды. Теорема о площади боковой поверхности правильной пирамиды.
2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K — середина ребра CC_1 , точка L — середина ребра $B_1 C_1$, точка M — середина ребра $C_1 D_1$. Найдите угол LMK . Ответ дайте в градусах.
3. В правильной треугольной призме _____ сторона основания AB равна 12, а высота призмы равна 2. На рёбрах _____ и _____ отмечены точки P и Q соответственно, причём P _____, а _____ .
Плоскость _____ пересекает ребро _____ в точке M .
а) Докажите, что точка M — середина ребра _____ .
б) Найдите расстояние от точки _____ до плоскости _____ .

Билет №15

1. Свойства пирамиды с равнонаклонёнными к основанию боковыми гранями (чертёж, доказательство).
2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны $31\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками A_1 и D .
3. В правильной четырёхугольной призме _____ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро _____ равно _____ . На рёбрах _____ отмечены точки M , N и K соответственно, причём _____ . Плоскость MNK пересекает ребро BC в точке L .
а) Докажите, что четырёхугольник $MNKL$ — квадрат.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

Билет №16

1. Свойство пирамиды с равнонаклонёнными к основанию боковыми рёбрами (чертёж, доказательство).
2. Диагональ куба равна 39. Найдите площадь его поверхности.
3. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона AB основания равна 12, а высота призмы равна 2. На рёбрах $B_1 C_1$ и AB отмечены точки P и Q соответственно, причём $PC_1 = 3$, а $AQ = 4$. Плоскость $A_1 PQ$ пересекает ребро BC в точке M .
а) Докажите, что точка M является серединой ребра BC .
б) Найдите расстояние от точки B до плоскости $A_1 PQ$.